

Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Planimetrija

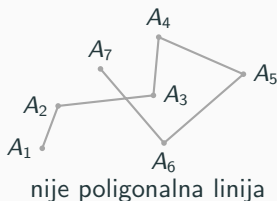
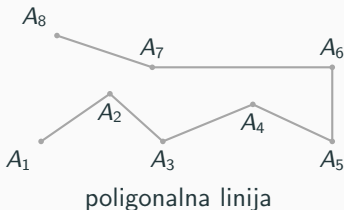
Poligoni i površine

Malo ćemo preciznije definirati četverokut i općenito poligon pomoću Jordana teorema.

Definicija

Poligonalna linija je unija dužina $\mathcal{L} = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}A_n}$ takva da

- (1) $\overline{A_iA_{i+1}} \cap \overline{A_jA_{j+1}} = \emptyset$, za sve $i = 1, 2, \dots, n-1, j \neq i-1, i, i+1$
- (2) $\overline{A_iA_{i+1}} \cap \overline{A_{i+1}A_{i+2}} = \{A_{i+1}\}$, za sve $i = 1, 2, \dots, n-1$



Poligoni i površine

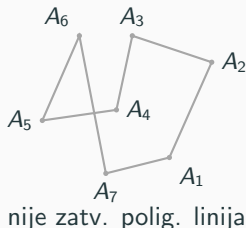
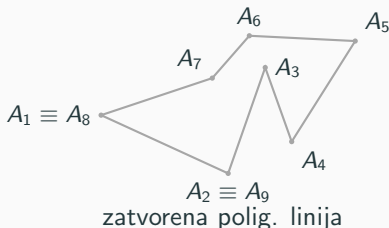
Definicija

Zatvorena poligonalna linija je unija dužina

$$\mathcal{Z} = \overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$$

takva da

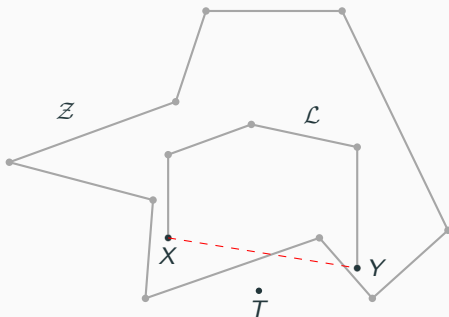
- (1) $\overline{A_iA_{i+1}} \cap \overline{A_jA_{j+1}} = \emptyset$, za sve $i = 1, 2, \dots, n$ i sve $j \neq i - 1, i, i + 1$
- (2) $\overline{A_iA_{i+1}} \cap \overline{A_{i+1}A_{i+2}} = \{A_{i+1}\}$, za sve $i = 1, 2, \dots, n$ (Ovdje smo dodatno identificirali $A_{n+1} \equiv A_1$, $A_{n+2} \equiv A_2$).



Poligoni i površine

Definicija

Kažemo da su točke X i Y u *istom području* s obzirom na zatvorenu poligonalnu liniju $\mathcal{Z}$ ako postoji poligonalna linija $\mathcal{L}$ koja spaja X i Y (tj. X i Y su joj krajnje točke) i koja ne siječe $\mathcal{Z}$.



Ovdje su X i Y u istom području s obzirom na $\mathcal{Z}$, a X i T nisu.

(Kod konveksnih skupova tražili smo $\overline{XY} \subseteq K$. Dakle, skup nije konveksan.)

Definicija

Za točku $S \in M$ i realan broj $r > 0$, skup

$$\overline{K}(S, r) = \{T \in M : d(S, T) \leq r\}$$

zovemo krug sa središtem u S i polumjerom r .

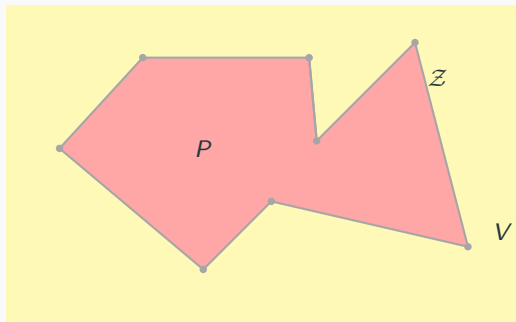
Definicija

*Kažemo da je skup točaka $S \subseteq M$ **omeđen** ako postoji krug K takav da je $S \subseteq K$; u protivnom, kažemo da je S **neomeđen**.*

Teorem 27 (Jordan)

Svaka zatvorena poligonalna linija $\mathcal{Z}$ dijeli ravninu M na točno dva područja:

- (1) Jedno je neomeđeno i zovemo ga **vanjština** od $\mathcal{Z}$.*
- (2) Jedno je omeđeno i zovemo ga **poligon** ili **unutrašnjost** od $\mathcal{Z}$.*



Neformalni opis definicije površine.

Definicija

Kažemo da je pravokutnik *poluotvoren* ako mu "lijeva" i "donja" stranica pripadaju, a "gornja" i "desna" ne pripadaju. (Npr. u $\mathbb{R}^2$ možemo gledati Kartezijev produkt $[a, b) \times [c, d)$.)

Definicija

Neka su p i q dva fiksna okomita pravca u ravnini, a $\mathcal{P}$ skup svih poluotvorenih pravokutnika čije su stranice paralelne pravcima p i q .

Za pravokutnik $P \in \mathcal{P}$ čije susjedne stranice imaju duljine a i b definiramo *površinu* sa

$$p(P) := ab.$$

Poligoni i površine

Definicija

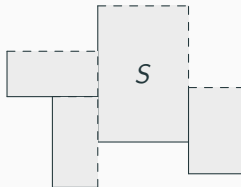
Skup $S \subseteq M$ je *jednostavan* ako postoji $n \in \mathbb{N}$ i disjunktni poluotvoreni pravokutnici $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ takvi da je

$$S = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n.$$

Za takav S definiramo njegovu površinu sa

$$p(S) := p(P_1) + p(P_2) + \dots + p(P_n).$$

Skup svih jednostavnih skupova ravnine označimo sa $\mathcal{J}$.



Poligoni i površine

Koristeći jednostavne likove, možemo definirati površinu i svih drugih podskupova ravnine (koji su Jordan izmjerivi). Ideja je vrlo slična definiciji integrala funkcije:

Za $A \subseteq M$ promotrimo bilo koji jednostavni skup S takav da je $A \subseteq S$. Jasno je da želimo da je

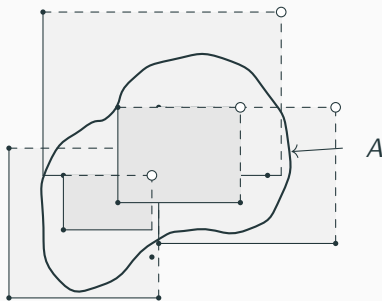
$$p(A) \leq p(S).$$

Ovo mora vrijediti i za “najmanji” takav S , pa

$$p(A) \leq \inf_{\substack{S \in \mathcal{J} \\ A \subseteq S}} p(S).$$

Analogno, želimo

$$p(A) \geq \sup_{\substack{S \in \mathcal{J} \\ S \subseteq A}} p(S).$$



Definicija

Neka je $A \subseteq M$ proizvoljan skup u ravnini, te neka je

$$p_+ := \inf_{\substack{S \in \mathcal{J} \\ A \subseteq S}} p(S), \quad p_- := \sup_{\substack{S \in \mathcal{J} \\ S \subseteq A}} p(S).$$

Ako je $p_+ = p_-$, kažemo da je skup A (Jordan)-izmjeriv i definiramo njegovu površinu sa

$$p(A) := p_+.$$

Napomena Nisu svi podskupovi ravnine Jordan-izmjerivi! No, svi “obični” podskupovi (poligoni, krugovi, ...) su Jordan-izmjerivi.

Teorem 28

- (a) *Ako su S_1 i S_2 Jordan-izmjerivi i disjunktni podskupovi ravnine, onda je i $S_1 \cup S_2$ Jordan-izmjeriv i vrijedi*

$$p(S_1 \cup S_2) = p(S_1) + p(S_2).$$

- (b) *Ako postoji izometrija koja preslikava izmjerivi skup S_1 u skup S_2 , onda je i S_2 izmjeriv, te vrijedi*

$$p(S_2) = p(S_1).$$

- (c) *Ako je P poligon i $\mathcal{Z}$ zatvorena poligonalna linija koja ga definira, onda su i P i $P \cup \mathcal{Z}$ izmjerivi i imaju istu površinu.*

Teorem 29

- (a) *Površina pravokutnika sa stranicama duljina a i b jednaka je $a \cdot b$.*
- (b) *Površina paralelograma sa stranicom a i visinom v_a na tu stranicu jednaka je $a \cdot v_a$.*
- (c) *Površina trokuta sa stranicom a i visinom v_a na tu stranicu jednaka je $\frac{1}{2}a \cdot v_a$.*

Dokaz.

- (a) Zahtjevno, tko želi znati više može pročitati dodatno o Jordanovoj mjeri.
- (b) Neka je $ABCD$ paralelogram sa duljinom stranica $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = a$ i visinom v_a .

Neka su $\tilde{D}$ i $\tilde{C}$ nožišta okomica iz točaka D i C na pravac AB .

Pravac AB je transversala paralelnih pravaca AD i BC , pa je

$$\angle D\tilde{A}\tilde{D} = \angle C\tilde{B}\tilde{C}.$$

Sada je $\triangle A\tilde{D}D = \triangle B\tilde{C}C$ po (K-S-K).

Slijedi da postoji izometrija koja preslikava jedan trokut u drugi te su im površine jednake.

Sada je

$$\begin{aligned} p(ABCD) &= p(\triangle A\tilde{D}D) + p(\tilde{D}BCD) \\ &= p(\triangle B\tilde{C}C) + p(\tilde{D}BCD) \\ &= p(\tilde{D}\tilde{C}CD) \\ &= a \cdot v_a. \end{aligned}$$

- (c) Neka je dan $\triangle ABC$ s visinom v_a na stranicu $\overline{BC}$ te neka je točka D presjek paralele s pravcem BC kroz točku A i paralele s pravcem AB kroz točku C .

Tada je $ABCD$ paralelogram sa stranicom $a = |\overline{BC}|$ i visinom v_a .

Slijedi da je $p(ABCD) = a \cdot v_a$.

Lako vidimo da je $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ po (K-S-K), pa je $p(\triangle ABC) = p(\triangle CDA)$.

Konačno,

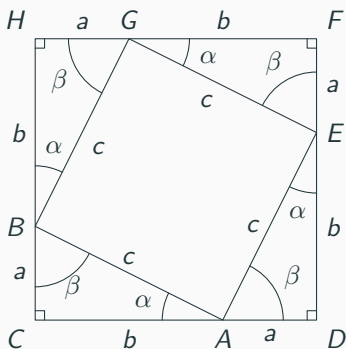
$$a \cdot v_a = p(ABCD) = p(\triangle ABC) + p(\triangle CDA) = 2p(\triangle ABC).$$



Teorem 30 (Pitagorin teorem)

- (a) U pravokutnom trokutu je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.
- (b) Obratno, ako za stranice $\triangle ABC$ vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$, onda je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutem kod vrha C .

Dokaz. (a) Neka je $\triangle ABC$ takav da je $\gamma = \pi/2$.



Produžimo $\overline{CA}$ preko A do točke D
tako da

$$|\overline{AD}| = a.$$

Produžimo $\overline{CB}$ preko B do točke H
tako da

$$|\overline{BH}| = b.$$

Neka je F sjecište paralele s pravcem CA kroz točku H i paralele s pravcem CB kroz točku D .

CD je transversala paralelnih pravaca CH i DF , pa je

$$\angle ADE = \angle BCA = \frac{\pi}{2}.$$

CH je transversala paralelnih pravaca CD i HF , pa je

$$\angle GHC = \angle BCA = \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, $CDFH$ je kvadrat stranice $a + b$.

Neka je $E \in \overline{DF}$ takva da $|\overline{DE}| = b$, te $G \in \overline{FH}$ takva da $|\overline{GH}| = a$.

$\triangle ABC$, $\triangle EAD$, $\triangle GEF$, $\triangle BGH$ su pravokutni s katetama a i b , pa su po (S-K-S) svi sukladni.

Slijedi:

$$\left. \begin{aligned} |\overline{AE}| &= |\overline{GE}| = |\overline{GB}| = |\overline{BA}| = c, \\ \angle AED &= \angle EGF = \angle GBH = \angle BAC = \alpha, \\ \angle EAD &= \angle GEF = \angle HGB = \angle CBA = \beta. \end{aligned} \right\} \text{ tj. } AEGB \text{ je romb.}$$

Poligoni i površine

Zbog $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$ (Prop. 15) i

$$\alpha + \angle BAE + \beta = \pi$$

slijedi $\angle BAE = \frac{\pi}{2}$.

Analogno,

$$\angle AEG = \angle EGB = \angle GBA = \frac{\pi}{2}.$$

Stoga je $AEGB$ kvadrat stranice c .

Vrijedi:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 = p(CDFH) \\ &= p(AEGB)p(\triangle ABC) + p(\triangle ADE) + p(\triangle EFG) + p(\triangle GHB) \\ &= c^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab \\ &= c^2 + 2ab \end{aligned}$$

pa je $a^2 + b^2 = c^2$.

(b) Neka u $\triangle ABC$ vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$.

Neka je $\triangle \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$ takav da je $|\widetilde{B}\widetilde{C}| = a$, $|\widetilde{A}\widetilde{C}| = b$, $\angle \widetilde{A}\widetilde{C}\widetilde{B} = \frac{\pi}{2}$.

Prema (a) dijelu je $|\widetilde{A}\widetilde{B}|^2 = |\widetilde{B}\widetilde{C}|^2 + |\widetilde{C}\widetilde{A}|^2 = a^2 + b^2 = c^2$.

Dakle, $|\widetilde{A}\widetilde{B}| = c$.

Po (S-S-S) je $\triangle ABC = \triangle \widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$.

Slijedi da je $\angle ACB = \angle \widetilde{A}\widetilde{C}\widetilde{B} = \frac{\pi}{2}$.

Teorem 31 (Heronova formula)

Površina trokuta sa stranicama a, b, c je

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

pri čemu je

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

poluopseg.

Poligoni i površine

Dokaz. Neka je X nožište okomice iz A na pravac BC . Pretpostavimo $X \in \overline{BC}$ (analogno vrijedi slučaj $X \notin \overline{BC}$).

Neka je $x = |\overline{BX}|$; tada $|\overline{CX}| = a - x$.

Po Pitagorinom poučku u $\triangle ABX$ vrijedi:

$$|\overline{AX}|^2 = c^2 - x^2$$

i u $\triangle ACX$:

$$|\overline{AX}|^2 = b^2 - (a - x)^2.$$

Stoga:

$$\begin{aligned} c^2 - x^2 &= b^2 - (a - x)^2 \\ \Rightarrow c^2 - x^2 &= b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \\ \Rightarrow x &= \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}. \end{aligned}$$

Poligoni i površine

Slijedi:

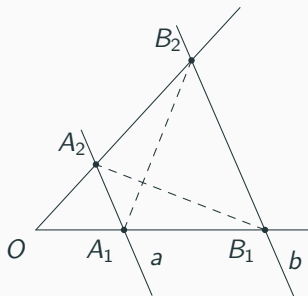
$$\begin{aligned} |\overline{AX}|^2 &= c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right)^2 \\ &= \left(c + \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right) \left(c - \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right) \\ &= \frac{c^2 + 2ac + a^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - a^2 + 2ac - c^2}{2a} \\ &= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a} \\ &= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} p(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} a \cdot |\overline{AX}| \\ &= \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{aligned}$$

Sličnost trokuta

Pokažimo prvo jedan pomoćni rezultat koji ćemo iskoristiti u dokazu teorema o sličnosti.



Propozicija 32 (Talesov teorem o proporcionalnosti)

Neka paralelni pravci a i b sijeku kut $\sphericalangle A_1OA_2$ u točkama A_1, A_2, B_1, B_2 kao na slici. Tada vrijedi:

$$(a) \frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|}$$

$$(b) \frac{|OA_1|}{|A_1B_1|} = \frac{|OA_2|}{|A_2B_2|}$$

$$(c) \frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|}$$

Dokaz. (a) Pokažimo prvo da $\triangle OA_1B_2$ i $\triangle OB_1A_2$ imaju jednake površine.

$$\begin{aligned}P(\triangle OA_1 B_2) &= P(\triangle OA_1 A_2) + P(\triangle A_1 A_2 B_2) \\&= P(\triangle OA_1 A_2) + \frac{1}{2} |A_1 A_2| d(B_2, A_1 A_2) \\&\stackrel{a \parallel b}{=} P(\triangle OA_1 A_2) + \frac{1}{2} |A_1 A_2| d(B_1, A_1 A_2) \\&= P(\triangle OA_1 A_2) + P(\triangle A_1 A_2 B_1) \\&= P(\triangle OB_1 A_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{P(\triangle OA_1 A_2)}{P(\triangle OA_1 B_2)} &= \frac{P(\triangle OA_1 A_2)}{P(\triangle OB_1 A_2)}, \\ \frac{\frac{1}{2} |OA_2| d(A_1, OA_2)}{\frac{1}{2} |OB_2| d(A_1, OB_2)} &= \frac{\frac{1}{2} |OA_1| d(A_2, OA_1)}{\frac{1}{2} |OB_1| d(A_2, OB_1)}, \\ \frac{|OA_2|}{|OB_2|} &= \frac{|OA_1|}{|OB_1|}.\end{aligned}$$

(b),(c) Slično.



Sličnost trokuta

Definicija

Trokuti T_1 i T_2 su *slični* ako im se vrhovi mogu označiti sa A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2 tako da vrijedi:

$$\angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_2 A_2 C_2, \quad \angle A_1 B_1 C_1 = \angle A_2 B_2 C_2, \quad \angle B_1 C_1 A_1 = \angle B_2 C_2 A_2,$$

te

$$\frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \lambda.$$

Tada pišemo

$$\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2,$$

i kažemo da je λ *koeficijent sličnosti*.

Definicija

Ako za stranice x_1, y_1 trokuta T_1 i stranice x_2, y_2 trokuta T_2 vrijedi

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

kažemo da trokuti T_1 i T_2 imaju *par proporcionalnih stranica*.

Sličnost trokuta

Teorem 33 (o sličnosti trokuta)

Dva trokuta su slična ako vrijedi bilo koji od sljedećih tvrdnji:

(a) (K-K) *Trokuti se podudaraju (tj. imaju sukladne) dva para kutova.*

$$(npr. \alpha_1 = \alpha_2 \text{ i } \beta_1 = \beta_2)$$

(b) (S-S-S) *Trokuti imaju sva tri para proporcionalnih stranica.*

$$(tj. postoji \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ t.d. } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda)$$

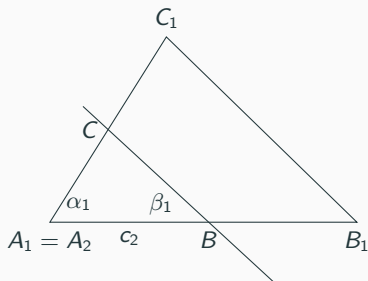
(c) (S-K-S) *Trokuti imaju jedan par proporcionalnih stranica i kutevi između tih stranica su im sukladni.*

$$(npr. \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ i } \gamma_1 = \gamma_2)$$

(d) (S²-K-S) *Trokuti imaju jedan par proporcionalnih stranica i kutevi nasuprot većim stranicama iz para su im sukladni.*

$$(npr. \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, a_1 > b_1 \text{ i } \alpha_1 = \alpha_2)$$

Sličnost trokuta



Dokaz. (a) Neka su $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ takvi da vrijedi $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\beta_1 = \beta_2$.

Tada je odmah i $\gamma_1 = \gamma_2$.

Ako je $c_1 = c_2$, onda su po teoremu (K-S-K) trokuti sukladni, pa su specijalno i slični ($\lambda = 1$).

Pretp. da je $c_2 < c_1$ (slučaj $c_1 < c_2$ ide analogno).

Neka je $B \in \overline{A_1B_1}$ takva da je $|A_1B| = c_2$, te $C \in \overline{A_1C_1}$ sjecište pravca A_1C_1 , s pravcem koji je paralelan B_1C_1 , a prolazi kroz B .

Kako je $\angle CA_1B = \alpha_1 = \alpha_2$, $\angle CBA_1 \stackrel{\text{transverzala}}{=} \beta_1 = \beta_2$, te $|A_1B| = c_2 = |A_2B_2|$, po (K-S-K) slijedi

$$\triangle A_1B_2C_2 \cong \triangle A_2B_2C_2.$$

Sličnost trokuta

Stoga je

$$|A_1C| = |A_2C_2| = b_2, \quad |BC| = |B_2C_2| = a_2.$$

Primijenimo Talesov teorem o proporcionalnosti na $\angle CA_1B$ i paralelne pravce BC i B_1C_1 :

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|} = \frac{|A_1B|}{|A_1B_1|} \stackrel{\text{Prop31(a)}}{=} \frac{|A_1C|}{|A_1C_1|} = \frac{b_2}{b_1},$$

$$\frac{c_2}{c_1} \stackrel{\text{Prop31(c)}}{=} \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Pa su u $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$ sva tri para stranica proporcionalna.

Slijedi da su ti trokuti slični.

(b), (c), (d) slično.

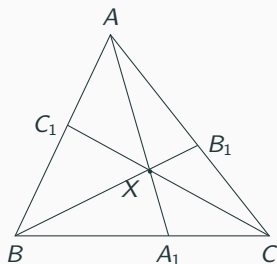


Teorem 34 (Cevin teorem)

Neka je $A_1 \in \overline{BC}$, $B_1 \in \overline{AC}$, $C_1 \in \overline{AB}$.

Dužine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ se sijeku u jednoj
točki ako i samo ako

$$\frac{|\overline{AB_1}|}{|\overline{B_1C}|} \cdot \frac{|\overline{CA_1}|}{|\overline{A_1B}|} \cdot \frac{|\overline{BC_1}|}{|\overline{C_1A}|} = 1.$$



Definicija

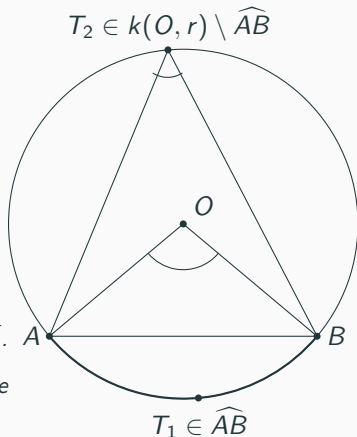
Tetiva je dužina koja spaja dvije točke na kružnici.

Tetiva koja prolazi središtem kružnice naziva se **dijametar** ili **promjer**.

Ako tetiva $\overline{AB}$ ne prolazi središtem O , onda kut $\angle AOB$ zovemo **središnji kut nad $\overline{AB}$** .

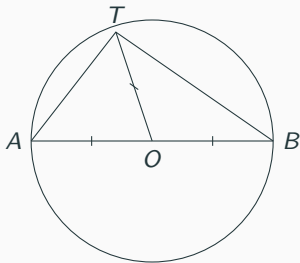
Presjek središnjeg kuta nad tetivom $\overline{AB}$ i kružnice označavamo s $\widehat{AB}$ i zovemo **luk nad $\overline{AB}$** .

Ako je $T_2 \in K(O, r) \setminus \widehat{AB}$ točka kružnice koja ne leži na luku $\widehat{AB}$, onda $\angle AT_2B$ zovemo **obodni kut nad $\overline{AB}$** .



Teorem 35

- (a) *Ako tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ imaju istu duljinu, onda su središnji kutovi nad tim tetivama sukladni.*
- (b) *Svi obodni kutovi nad nekom tetivom su međusobno sukladni i jednaki polovini središnjeg kuta nad tom tetivom.*



Teorem 36 (Tales)

Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice, te T proizvoljna točka na njoj. Tada je $\angle ATB = \pi/2$.

Dokaz.

$$\begin{aligned}\pi &= \angle AOT + \angle BOT \\ &= [\angle AOT \text{ vanjski u } \triangle BOT; \angle BOT \text{ vanjski u } \triangle AOT] \\ &= \angle OBT + \angle BTO + \angle TAO + \angle ATO \\ &= \angle BTO + \angle BTO + \angle ATO + \angle ATO \\ &= 2\angle ATB\end{aligned}$$

Propozicija 37

(a) *Radijus upisane kružnice $\triangle ABC$ je*

$$r = \frac{P}{s},$$

$$\text{uz } s = \frac{a + b + c}{2}, P = P(\triangle ABC).$$

(b) *Radijus opisane kružnice $\triangle ABC$ je*

$$R = \frac{abc}{4P}.$$

Klasična algebra vektora

Definicija

Uređeni par točaka $(A, B) \in M^2$ zovemo **orijentirana dužina** i označavamo $\overrightarrow{AB}$.

Točku A zovemo početak orijentirane dužine, a B kraj orijentirane dužine.



Uočimo, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ osim ako je $A = B$.

Definicija

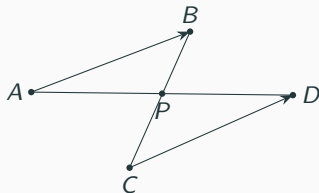
Za orijentirane dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kažemo da su **ekvivalentne** i pišemo

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$$

ako $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište.

Uočimo, A, B, C, D nisu kolinearne, onda vrijedi:

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \iff ACDB \text{ paralelogram.}$$



Teorem 1

Relacija $\equiv$ je relacija ekvivalencije na skupu svih orijentiranih dužina $M \times M$.

Dokaz.

(refl.) $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{AB}$ jer $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ imaju isto polovište.

(sim.) Ako je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, onda AD i BC imaju isto polovište.

No, tada i CB i DA imaju isto polovište, pa je $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$.

(tranz.) Neka je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{EF}$.

Tada AD i BC imaju isto polovište P , a CF i DE isto polovište Q .

Pretp. da $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ leže na 3 različita pravca (drugi slučaj slično).

Tada su $ACDB$ i $CEFD$ paralelogram, pa je $AB \parallel CD$ i $|AB| = |CD|$,
 $CD \parallel EF$ i $|CD| = |EF|$. Dakle, $AB \parallel EF$ i $|AB| = |EF|$.

Zato AF i EB imaju isto polovište, pa

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{EF}.$$

Uočimo, iz definicije odmah slijedi: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{BD}$

Definicija

*Klase ekvivalencije relacije $\equiv$ zovemo **vektori** i označavamo sa $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$*

Skup svih vektora označavamo sa

$$V^2 := M \times M / \equiv.$$

Klasi ekvivalencije kojoj pripada orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ pripisujemo oznaku $[\overrightarrow{AB}]$,

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{AB}\}.$$

Propozicija 2

Za svaki vektor $\vec{a}$ i točku A postoji jedinstvena točka B takva da

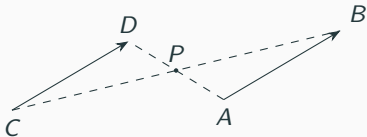
$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}].$$

Dokaz. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{CD}]$ za neke C, D . Neka je P polovište od AD , te B točka centralno simetrična točki C s obzirom na P . Očito je $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$, pa je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$.

Pretpostavimo da postoje B_1, B_2 takve da

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB_1}] = [\overrightarrow{AB_2}].$$

Tada je $\overrightarrow{AB_1} \equiv \overrightarrow{AB_2}$, pa $\overline{AB_1}$ i $\overline{AB_2}$ imaju isto polovište te je $B_1 = B_2$.



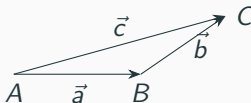
Definicija

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori, te A, B, C takve da

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}], \quad \vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$$

(postoje prema Prop. 2). **Zbroj vektora** $\vec{a} + \vec{b}$ definiramo kao vektor

$$\vec{c} = [\overrightarrow{AC}].$$



Propozicija 3

Definicija zbroja vektora ne ovisi o izboru reprezentanata klase.

Dokaz. Neka je

$$\vec{a} = [\overrightarrow{A_1 B_1}] = [\overrightarrow{A_2 B_2}], \quad \vec{b} = [\overrightarrow{B_1 C_1}] = [\overrightarrow{B_2 C_2}].$$

Tvrdimo da je

$$[\overrightarrow{A_1 C_1}] = [\overrightarrow{A_2 C_2}],$$

tj. $\overrightarrow{A_1 C_1} \equiv \overrightarrow{A_2 C_2}$.

Iz $\overrightarrow{A_1 B_1} \equiv \overrightarrow{A_2 B_2}$ slijedi (po napomeni) $\overrightarrow{A_1 A_2} \equiv \overrightarrow{B_1 B_2}$, a iz $\overrightarrow{B_1 C_1} \equiv \overrightarrow{B_2 C_2}$ slijedi $\overrightarrow{B_1 B_2} \equiv \overrightarrow{C_1 C_2}$.

Po tranzitivnosti dobijemo $\overrightarrow{A_1 A_2} \equiv \overrightarrow{C_1 C_2}$, pa opet po napomeni $\overrightarrow{A_1 C_1} \equiv \overrightarrow{A_2 C_2}$. □

Teorem 4

Skup svih vektora s obzirom na operaciju zbrajanja čini komutativnu grupu.

Dokaz. Neka su

$$\vec{a} = [\overrightarrow{AB}], \vec{b} = [\overrightarrow{BC}], \vec{c} = [\overrightarrow{CD}].$$

Tada

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = ([\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}]) + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AD}],$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = [\overrightarrow{AB}] + ([\overrightarrow{BC}] + [\overrightarrow{CD}]) = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BD}] = [\overrightarrow{AD}].$$

Dakle, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Nadalje, očito je $\overrightarrow{AA} \equiv \overrightarrow{BB}$ za bilo koje točke A, B . **Nul-vektor** definiramo kao

$$\vec{0} := [\overrightarrow{AA}].$$

Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{XY}]$. Tada

$$\vec{a} + \vec{0} = [\overrightarrow{XY}] + [\overrightarrow{YY}] = [\overrightarrow{XY}] = \vec{a}, \quad \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

Zbroj vektora

Za $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ definiramo

$$-\vec{a} := [\overrightarrow{BA}],$$

što je **suprotni vektor**. Tada

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BA}] = [\overrightarrow{AA}] = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}.$$

(DZ) Definicija suprotnog vektora ne ovisi o izboru reprezentanta klase; tj.

$$\vec{a} = [\overrightarrow{A_1B_1}] = [\overrightarrow{A_2B_2}] \Rightarrow [\overrightarrow{B_1A_1}] = [\overrightarrow{B_2A_2}].$$

Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$. Tada je $\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$.

Po Prop. 2 postoji točka D takva da $\vec{b} = [\overrightarrow{AD}]$. Iz $\overrightarrow{AD} \equiv \overrightarrow{BC}$ slijedi (po napomeni) $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{DC}$, tj. $\vec{a} = [\overrightarrow{DC}]$. Zato

$$\vec{b} + \vec{a} = [\overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{DC}] = [\overrightarrow{AC}] = \vec{a} + \vec{b}.$$

